Correction Feuille Exercice 18

Montrer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs

Exercice 10 (Combinaison linéaire)

1. on cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = x \\
\iff &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \\ 2\lambda_1 &= 7 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_2 &= \dfrac{1}{2} \\ \lambda_1 &= \dfrac{7}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } x = \frac{7}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \text{ donc } x \text{ est une combinaison linéaire de } u_1 \text{ et } u_2.}$$

2. On cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = x \\
\iff &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3 \\ 0 &= 1 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } x \text{ n'est pas une combinaison linéaire de } u_1 \text{ et } u_2.}$$

Exercice 11

On pose les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. On a $A = e_1 + 2e_2$ donc A est une combinaison linéaire de e_1 et e_2. Si on ne voit pas directement cette relation, on cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = A\\
\Longleftrightarrow & \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 3 \\ 2\lambda_2 & = 4 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\lambda_1 & = 3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} 2+1 & = 3 \\ \lambda_2 & = 2 \\ \lambda_1 & = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A = e_1 + 2e_2 \text{ donc } A \text{ est une combinaison linéaire de } e_1 \text{ et } e_2.}$$

On cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = B\\
\Longleftrightarrow & \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = -3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & = 4 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = -1 \\ 2\lambda_2 & = -4 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\lambda_1 & = 3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}\\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} -2+1 & = -1 \\ \lambda_2 & = -2 \\ \lambda_1 & = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } B = e_1 - 2e_2 \text{ donc } B \text{ est une combinaison linéaire de } e_1 \text{ et } e_2.}$$

On cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = C\\
\iff &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}\\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= -5 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 8 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ 2\lambda_2 &= -4 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\lambda_1 &= 9 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} -2 + 3 &= 1 \\ \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_1 &= 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } C = 3e_1 - 2e_2 \text{ donc } C \text{ est une combinaison linéaire de } e_1 \text{ et } e_2.}$

2. De la même façon, on cherche 2 réels λ_1, λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = D\\
\iff &\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ 2\lambda_2 &= 5 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3\lambda_1 &= 4 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}\\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ \lambda_2 &= 5/2 \\ \lambda_1 &= 4/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Or } \frac{5}{2} + \frac{4}{3} = \frac{23}{6} \neq 4 \text{ donc } D \text{ n'est pas combinaison linéaire de } e_1 \text{ et } e_2.}$

3. Ce n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car le vecteur D n'est pas combinaison linéaire de e_1 et e_2.

Exercice 12 (**)
On cherche k, λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = x \Longleftrightarrow & \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 1 \\ k\lambda_1 + 8\lambda_2 & = 2 \\ 2\lambda_1 + k\lambda_2 & = 1 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 1 \\ (k+8)\lambda_1 & = 10 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 8L_1 \\ (k+2)\lambda_2 & = -1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On suppose déjà que $k \neq -8$ et $k \neq -2$ sinon le système n'a pas de solutions. Dans ce cas, le système est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 1 \\ \lambda_1 & = \dfrac{10}{k+8} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 8L_1 \\ \lambda_2 & = \dfrac{-1}{k+2} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution il faut que

$$\begin{aligned}
& \frac{10}{k+8} + \frac{1}{k+2} - 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow & \frac{10(k+2) + (k+8) - (k+2)(k+8)}{(k+2)(k+8)} = 0 \\
\Longleftrightarrow & 10k + 20 + k + 8 - (k^2 + 10k + 16) = 0 \\
\Longleftrightarrow & -k^2 + k + 12 = 0 \\
\Longleftrightarrow & k^2 - k - 12 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme du second degré précédent est $\Delta = 1 - 4 \times (-12) = 49$. Il y a donc deux possibilités pour k

$$\boxed{k = \frac{1-7}{2} = -3 \text{ ou } k = \frac{1+7}{2} = 4.}$$

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel

Exercice 13

1. (a) L'élément $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

   $\boxed{\text{Ce n'est donc pas un espace vectoriel.}}$

   (b) — On a $F_2 \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
   — On a $0 + 2 \times 0 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_2$.
   — Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in F_2$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in F_2$, c'est à dire que $x_1 + 2y_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 = 0$. Le vecteur $\lambda X_1 + X_2$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \end{pmatrix}$. On a alors

   $$(\lambda x_1 + x_2) + 2 \times (\lambda y_1 + y_2) = \lambda x_1 + 2\lambda y_1 + x_2 + 2y_2 = 0.$$

   Donc $\lambda X_1 + X_2 \in F_2$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_2 \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}).}$$

2. (a) — On a $F_1 \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   — On a bien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\times 0 \\ -0 \end{pmatrix} \in F_1$.
   — Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \in F_1$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \in F_2$. Le vecteur $\lambda X_1 + X_2$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda 2x_1 + 2x_2 \\ -\lambda x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ 2\times(\lambda x_1 + x_2) \\ -(\lambda x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 2\tilde{x} \\ -\tilde{x} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{x} = \lambda x_1 + x_2$. Donc $\lambda X_1 + X_2 \in F_1$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_1 \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

   (b) On a $0+0+3\times 0 = 0 \neq 1$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F_2$.

$$\boxed{F_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Exercice 14 (*)

1. — On a $F \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   — En prenant $a = b = 0$, on a bien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   — Soient X, Y deux vecteurs de F. Il existe alors $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le vecteur $\lambda X + Y$ s'écrit alors

$$\lambda X + Y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ 0 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

   (En effet $\lambda x_1 + y_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$ donc le vecteur est bien de la forme souhaitée.)

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est un sev de } \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$$

2. — F est un ensemble de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $F \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   — Le vecteur nul $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ vérifie $A \times 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Donc $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \in F$.
   — Soient $X, Y \in F$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a notamment $AX = AY = 0$. On s'intéresse au vecteur $\lambda X + Y$. On calcule

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0$$

   Donc $\lambda X + Y \in F$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\} \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$$

Exercice 15 (**)
L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, $\mathbb{R}_3[X]$ est un espace vectoriel muni de la loi $+$ et $\times$ (les polynômes sont alors des vecteurs). La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est formé des 4 polynômes $(1, X, X^2, X^3)$.

1. — L'ensemble F est un ensemble de polynômes de degrés inférieurs à 3 donc $F \subset \mathbb{R}_3[X]$.
   — Notons Z le polynôme nul, c'est à dire $\forall X \in \mathbb{R}, Z(X) = 0$. On a bien $Z(0) = Z'(0) = 0$ et donc $Z \in \mathbb{R}_3[X]$.
   — Soient P, Q deux polynômes de F. On a alors $P(0) = P'(0) = Q(0) = Q'(0) = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au polynôme $\lambda P + Q$. D'après les règles sur les polynômes,
   $$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$$
   D'après les règles de dérivation, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ Et donc :
   $$(\lambda P + Q)'(0) = \lambda P'(0) + Q'(0) = 0$$
   Les deux conditions sont vérifiées donc $\lambda P + Q \in F$.
   $$\boxed{F \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].}$$
2. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$
   $$\begin{aligned}
   &\lambda_0 Q_0(X) + \lambda_1 Q_1(X) + \lambda_2 Q_2(X) + \lambda_3 Q_3(X) = 0\\
   \iff &\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3 = 0\\
   \iff &\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X^2 - 2X + 1) + \lambda_3(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 0\\
   \iff &\lambda_3 X^3 + (\lambda_2 - 3\lambda_3)X^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3)X + \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0
   \end{aligned}$$
   On obtient alors par identification le système :
   $$\begin{cases}
   \lambda_3 & = 0\\
   \lambda_2 - 3\lambda_3 & = 0\\
   \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0\\
   \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0
   \end{cases}$$
   Ce système est homogène et échelonnée. Les pivots sont tous non nuls. Il a donc une unique solution :
   $$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
   $$\boxed{\text{La famille } Q_i = (X-1)^i \text{ pour } i \in [\![0, 3]\!] \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}^3[X].}$$
   C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Soit $R(X) = 2X^3 + 3X - 4$. On note $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$, $e_2(X) = X^2$ et $e_3(X) = X^3$. On a alors
   $$R(X) = 2e_3(X) + 3e_1(X) - 4e_0(X)$$
   $$\boxed{\text{Les coordonnées de } R \text{ dans la base canonique sont donc } (2, 0, 3, -4).}$$
   On cherche les coordonnées de R dans la base (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3), c'est à dire $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que
   $$\begin{aligned}
   &\lambda_0 Q_0(X) + \lambda_1 Q_1(X) + \lambda_2 Q_2(X) + \lambda_3 Q_3(X) = 2X^3 + 3X - 4\\
   \iff &\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3 = 2X^3 + 3X - 4\\
   \iff &\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X^2 - 2X + 1) + \lambda_3(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 2X^3 + 3X - 4\\
   \iff &\lambda_3 X^3 + (\lambda_2 - 3\lambda_3)X^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3)X + \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 2X^3 + 3X - 4
   \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda_3 & = 2 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 3 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 & = 2 \\ \lambda_2 & = 6 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 6 & = 3 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 & = 2 \\ \lambda_2 & = 6 \\ \lambda_1 & = 9 \\ \lambda_0 - 9 + 6 - 2 & = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 & = 2 \\ \lambda_2 & = 6 \\ \lambda_1 & = 9 \\ \lambda_0 & = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } R \text{ dans la base } (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \text{ sont donc } (1, 9, 6, 2).}$$

4. On cherche une famille génératrice de F. Soit P un polynôme de F. On écrit alors $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Comme $P \in F$, on a
$$P(0) = d = 0$$
De plus $P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$ et on a
$$P'(0) = c = 0.$$
Donc
$$\begin{aligned} F &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ c = 0,\ d = 0\} \\ &= \{aX^3 + bX^2 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \qquad = Vect(X^3, X^2) \end{aligned}$$
La famille (X^2, X^3) est une famille génératrice de F. C'est également une famille libre (facile à montrer).
$$\boxed{\text{Donc } (X^2, X^3) \text{ est une base de } F.}$$

Trouver une famille libre, génératrice ou une base d'un sous espace vectoriel

Exercice 16 (Base)

— On montre que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Dans le système précédent, les pivots sont non nuls donc le système est de Cramer et nécessairement,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre.}}$$

— On montre désormais que la famille est génératrice. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On cherche λ_1, λ_2 et λ_3 tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = X \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & = y \\ \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 & = y - x \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \qquad \lambda_2 + 2\lambda_3 & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = x \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 & = y - x \\ \qquad\qquad \lambda_3 & = z - y + x \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\lambda_3 = z - y + x, \quad \lambda_2 = y - x - (z - y + x) = -2x + 2y - z$$

et finalement

$$\lambda_1 = x - (-2x + 2y - z) - 2(z - -y + x) = x - z$$

Autrement dit, tout vecteur X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3) car il s'écrit

$$X = (3x - y - z)e_1 + (y - z)e_2 + (z - x)e_3$$

$$\boxed{\text{La famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre et génératrice. C'est donc une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

Les coordonnées du vecteur $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans cette base sont

$$\boxed{\lambda_1 = 0 - (-2) = 2, \qquad \lambda_2 = 0 + 2 - (-2) = 4, \qquad \lambda_3 = -2 - 1 = -3}$$

Exercice 17 (*)

Déterminer si les familles de vecteurs (u_i) suivantes sont des familles libres, des familles génératrices, des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. La famille (u_1, u_2) est-elle génératrice ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche λ_1 et λ_2 tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = X \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ x = y \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = z \end{cases}$$

On s'aperçoit que x doit être égal à y ce qui n'est évidemment pas toujours le cas. Prenons le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ce n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2) \text{ n'est donc pas une famille génératrice de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2) \text{ est donc libre}}$$

Ce n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

2. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle génératrice ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = X &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = y \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 & = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = x \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = y - x \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = z - 2x \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = x \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = y - x \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = z - 2x \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = x \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = z - 2x \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = y - x \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système est échelonné mais on a une inconnue de plus. On pose alors $\lambda_4 = 0$ et on résout le système :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = z - 2x \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ -3\lambda_2 & = z + y - 3x \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{z}{3} + \frac{y}{3} \\ \lambda_2 & = x - \frac{z}{3} - \frac{y}{3} \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc on peut écrire $X = \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{3}\right) u_1 + \left(x - \frac{z}{3} - \frac{y}{3}\right) u_2 + \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{3}\right) u_3$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ est donc une famille génératrice de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

On vérifie si la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = 0 & \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = 0 & L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = 0 & L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = 0 & \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = 0 & L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = 0 & L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 & = 0 & \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 - 3\lambda_4 & = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \lambda_3 - \lambda_4 & = 0 & \end{cases}$$

En posant notamment $\lambda_4 = 1$, le système s'écrit

$$\begin{cases} \lambda_1 & = -\dfrac{8}{3} \\ \lambda_2 & = -\dfrac{4}{3} \\ \lambda_3 & = 1 \end{cases}$$

On a donc trouvé trois valeurs pour λ_1, λ_2 et λ_3 non tous nuls.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ n'est donc pas libre}}$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) n'est pas une base.

3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle génératrice ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = X \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 & = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = y \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ \lambda_3 & = y - x \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = z - 2x \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ \lambda_3 & = y - x \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = z - 2x \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = z - 2x \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ -3\lambda_2 & = z + y - 3x \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{z}{3} + \frac{y}{3} \\ \lambda_2 & = x - \frac{z}{3} - \frac{y}{3} \\ \lambda_3 & = y - x \end{cases}$$

Donc on peut écrire $X = \left(\frac{z}{3} + \frac{y}{3}\right) u_1 + \left(x - \frac{z}{3} - \frac{y}{3}\right) u_2 + (y - x)\, u_3$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une famille génératrice de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

On vérifie si la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \quad L_1 - L_2 \to L_2 \\ -3\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \quad L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est donc libre}}$$

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base.}}$$

Exercice 18 (**)
On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 2x+y-3z=0,\ x-y+2z=0 \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. On montre que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a
   — $F \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   — On a $2\times 0+0-3\times 0=0$ et $0-0+2\times 0=0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.
   — Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in F$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les relations
   $$2x_1+y_1-3z_1=0, \qquad x_1-y_1+2z_1=0$$
   $$2x_2+y_2-3z_2=0, \qquad x_2-y_2+2z_2=0$$
   On vérifie que le vecteur $\lambda X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ vérifie les équations de l'ensemble F. D'un côté,
   $$2(\lambda x_1+x_2)+\lambda y_1+y_2-3(\lambda z_1+z_2) = \lambda(2x_1+y_1-3z_1)+(2x_2+y_2-3z_2)=0$$
   en utilisant les deux équations appropriées. D'un autre côté
   $$\lambda x_1+x_2-(\lambda y_1+y_2)+2(\lambda z_1+z_2) = \lambda(x_1-y_1+2z_1)+x_2-y_2+z_2=0.$$
2. On a
   $$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 2x+y-3z=0,\ x-y+2z=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, 3x-z=0,\ y=2z+x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x=\frac{1}{3}z,\ y=\frac{7}{3}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 7z \\ 3z \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$
   $$\boxed{\text{Le vecteur } \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est une famille génératrice de } F.}$$
3. Comme il n'y a qu'un vecteur, la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ est libre. Donc $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est une base de } F.}$

Exprimer et simplifier un espace vectoriel sous la forme d'un Vect

Exercice 19

On considère le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivant :

$$F = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

1. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F. On peut supprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas générateur. On cherche à déterminer si la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \quad L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases}$$

En prenant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 = -5$. Donc

$$-5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille n'est pas libre et on peut donc la famille composée des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est génératrice de F.

$$\boxed{F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

2. Un élément quelconque de F s'écrit sous la forme

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F car on ne peut pas trouver λ et μ vérifiant cela.

Exercice 20 (*)
On résout le système :

$$E_\lambda : \left\{\begin{array}{rcl}(3-\lambda)x-y&=&0\\ 9x+(-3-\lambda)y&=&0\\ (4-\lambda)z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}9x+(-3-\lambda)y&=&0\\ (3-\lambda)x-y&=&0\\ (4-\lambda)z&=&0\end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}9x+(-3-\lambda)y&=&0\\ (3-\lambda)x-y&=&0\\ (4-\lambda)z&=&0\end{array}\right. \quad 9L_2-(3-\lambda)L_1 \to L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}9x+(-3-\lambda)y&=&0\\ -\lambda^2 y&=&0\\ (4-\lambda)z&=&0\end{array}\right. \quad 9L_2-(3-\lambda)L_1 \to L_2$$

On résout les équations

$$4-\lambda=0 \iff \lambda=4$$

et

$$-\lambda^2=0 \iff \lambda=0$$

On a alors plusieurs cas :

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,4\}$:
   Dans ce cas, le système est échelonné avec des pivots non nuls. Il est donc de Cramer et a une unique solution.

   $$\boxed{\text{L'ensemble des solution est } \mathcal{S}_\lambda = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$$

2. Pour $\lambda = 0$: Le système s'écrit :

   $$E_0 : \left\{\begin{array}{rcl}9x+-3y&=&0\\ 0&=&0\\ 4z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}y&=&3x\\ 0&=&0\\ z&=&0\end{array}\right.$$

   Donc l'ensemble des solutions est

   $$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= \left\{\begin{pmatrix}x\\3x\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{x\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}\\ &\boxed{= Vect\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)}\end{aligned}$$

3. Pour $\lambda = 4$: Le système s'écrit :

   $$E_4 : \left\{\begin{array}{rcl}9x+-7y&=&0\\ -8y&=&0\\ 0&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\ y&=&0\\ 0&=&0\end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\boxed{= Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Exercice 21 (**)
On considère les vecteurs $u = (-4;4;3)$, $v = (-3;2;1)$, $s = (-1;2;2)$ et $t = (-1;6;7)$ de $\mathbb{R}^3$.

On montre tout d'abord que $Vect(u;v) \subset Vect(s;t)$.

Soit $X \in Vect(u;v)$, c'est à dire qu'il existe λ, μ tels que $X = \lambda u + \mu v$. On cherche alors x et y tels que $X = xs + yv$.